**Justyna Prud**, KPCEN w Bydgoszczy
**Anna Owedyk**, Szkoła Podstawowa w Białych Błotach
**Agnieszka Sadowska**, Szkoła Podstawowa nr 4 w Solcu Kujawskim, KPCEN w Bydgoszczy
**Ewa Wierzchowska**, Szkoła Podstawowa nr 8 w Inowrocławiu, KPCEN w Bydgoszczy

# W poszukiwaniu jednego punktu

Wyniki egzaminów zewnętrznych z matematyki nie wypadają w naszym województwie najlepiej. Spędza to sen z powiek nauczycielom matematyki różnych etapów edukacyjnych, wychowawcom, dyrektorom szkół, organom prowadzącym i nadzorującym. Ubiegłoroczny średni wynik z egzaminu ósmoklasisty z matematyki - 46% - uplasował nas na 13 miejscu w rankingu województw i był niższy od ogólnopolskiego o 6 punktów procentowych. Wydawałoby się, że to bardzo dużo, ale w praktyce to o 1,5 punktu mniej w arkuszu przeciętnego piętnastolatka w kujawsko-pomorskim. W poprzednich latach wyniki były trochę lepsze, ale i tak niższe od krajowych o 3-4 punkty procentowe, co realnie dawało różnicę tylko jednego punktu. Zastanówmy się, czy może wspólnymi siłami uda nam się do majowych egzaminów zakończyć z powodzeniem poszukiwania tego brakującego w uczniowskich testach punktu, a co za tym idzie - osiągnąć z egzaminu ósmoklasisty wynik przynajmniej taki sam, jak ogólnopolski.

Przyjrzyjmy się osiągnięciom matematycznym ósmoklasistów w roku 2024. W arkuszu nie było zadań bardzo trudnych, ale również bardzo łatwych i łatwych (w kraju tylko zadanie 12). Uczniowie najgorzej poradzili sobie z zadaniami o treści geometrycznej. Zadanie 19. weryfikujące umiejętność zastosowania i przekształcania wzoru na objętość graniastosłupa wykonane zostało przez zdających zaledwie w 23% (w Polsce 30%). Za rozwiązanie zadania 14. (typu prawda-fałsz), wymagającego zastosowania i przekształcenia wzoru na pole trójkąta, uczniowie otrzymali średnio 26% (31%), a za zadanie 17. sprawdzające umiejętność obliczenia pola trapezu z zwykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa oraz własności trójkątów równoramiennych przy zbudowaniu odpowiedniej strategii - 39% (46%). Wszystkie te zadania oprócz znajomości wzorów wymagały zastosowania i przekształcania wyrażeń algebraicznych, rozwiazywania równań oraz podstawowych umiejętności rachunkowych. Dużym problem dla piętnastolatków było, podobnie jak w poprzednich latach, zrozumienie treści zadania, analiza rysunków i wykorzystanie własności figur geometrycznych oraz zaplanowanie strategii rozwiązania w zadaniach wieloetapowych.

A przecież proste zależności geometryczne uczeń wykorzystuje nawet w trakcie treningu piłki nożnej, gdy bramkarz podczas rzutu wolnego ustawia mur z zawodników drużyny broniącej tak, by jego końce lewy i prawy znalazły się na ramionach kąta, które wyznacza strzelec i krańce bramki, a sam staje na dwusiecznej tego kąta. Praktyka czyni mistrza i to nie tylko na boisku, a sztab trenerów różnych specjalności może wesprzeć ucznia w drodze przygotowań do egzaminu z matematyki. Na dowód, ile geometrii można nauczyć się na boisku zapraszam do lektury artykułu prof. dr hab. inż. Konradu Eckesa: http://smj.jaroslaw.pl/aktualnosci/231-pika-a-geometria.

Do najtrudniejszych zadań w arkuszu ósmoklasisty należy również ocenione na 26% (35%) zadanie 16. Polegało ono na zbudowaniu modelu matematycznego do zadania tekstowego osadzonego w kontekście praktycznym, a następnie wyznaczenia liczby spełniającej warunki zadania. Uczeń mógł zastosować umiejętności z zakresu arytmetyki czy algebry, ale kontekst realistyczny nie wymagał zastosowania wzoru czy równania, pozwalał na przedstawianie nieszablonowych sposobów rozwiązania zaczerpniętych z życia codziennego, takich jak proporcjonalność, wykorzystanie własności podzielności liczb do eliminowania niepoprawnych rozwiązań, metody graficzne oraz „odkurzona" metoda prób i błędów. Tu również moglibyśmy odnaleźć brakujący punkt, pozwalając uczniom na samodzielne lub zespołowe, kreatywne rozwiązywanie zadań i prezentowanie innych niż algebraiczne (równanie) sposobów rozwiązywania problemów.

Ubiegłoroczni maturzyści na maturze podstawowej z matematyki nie wypadli lepiej od absolwentów szkół podstawowych, zajmując ze średnią ok. 61% 12. miejsce w rankingu ogólnopolskim, a ich wynik był o 2 punkty procentowe niższy o średniej krajowej. W praktyce przeciętny abiturient w województwie kujawsko-pomorskim otrzymał niecały jeden punkt mniej niż w kraju. Rzućmy okiem na arkusz podstawowy, kontynuując śledztwo w poszukiwaniu jednego punktu.

W zestawie nie było zadań bardzo trudnych ani bardzo łatwych. Spośród 27 zadań zamkniętych 17 było łatwych, a pozostałe okazały się umiarkowanie trudne. Największe problemy sprawiły maturzystom zadania otwarte, szczególnie te o treści geometrycznej. Najgorzej wypadło zadanie 26. (otwarte z luką), które zostało wykonane w 21% (23% w kraju) i wymagało wykorzystania zależności między skalą a objętością brył podobnych. Z czego wynikały problemy? Absolwenci liceów i techników albo nie znali relacji między objętościami brył podobnych i nie potrafili wyszukać jej w *Wybranych wzorach matematycznych*, albo znaleźli, ale niepoprawnie zinterpretowali zależność (czytanie ze zrozumieniem!), która pojawiła się na maturze po raz pierwszy od wielu lat.

Słabo wypadło również zadanie 24. z geometrii analitycznej, ocenione przez egzaminatorów na 36% (41%), które polegało na wyznaczeniu długości boku równoległoboku przy znanych współrzędnych dwóch kolejnych jego wierzchołków oraz punktu przecięcia przekątnych. Rozwiązanie zadania, oprócz prawidłowej interpretacji wzorów zawartych w tablicach, obligowało do wykorzystania własności równoległoboku oraz poprawności rachunkowej, która pomimo możliwości użycia kalkulatora, sprawiała maturzystom problemy.

Do zadań trudnych w zestawie maturalnym należy zaliczyć również zadanie 17. dotyczące własności n-tego wyrazu oraz sumy n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego. Najczęściej popełniane przez abiturientów błędy wynikały z nieuważnego czytania treści polecenia, co powodowało, że mylili ciąg arytmetyczny z geometrycznym lub sumę 15-tu wyrazów ciągu z piętnastym wyrazem ciągu. Również i tutaj popełniali błędy rachunkowe.

Wśród czterech najtrudniejszych znalazło się wykonane w 32% (35%) zadanie optymalizacyjne z kontekstem praktycznym (zad. 31), w którym należało wyznaczyć wymiary prostokątnego wybiegu dla zwierząt tak, by przy podanych warunkach jego pole powierzchni było największe. Aby rozwiązać problem, abiturient powinien najpierw zbudować model matematyczny sytuacji, a następnie zbadać, kiedy funkcja kwadratowa będąca reprezentacją tego modelu przyjmie wartość największą. Niski poziom realizacji tego zadania wynikał przede wszystkim z braku umiejętności zauważania i zapisywania zależności między obiektami na podstawie treści zadania (interpretacja treści polecenia), a często również przekształcania i rozumienia wzorów. Z modelowaniem matematycznym mają problem również uczniowie szkół podstawowych, a przecież umiejętność zapisywania treści zadań za pomocą wyrażeń algebraicznych, rozumienia i przekształcania wzorów ćwiczą nauczyciele przedmiotów przyrodniczych. Z jednej strony wykorzystują obliczenia i zależności matematyczne, z drugiej, rozwiązując zadania, mają realny wpływ na poprawę kompetencji matematycznych uczniów.

Gdzie zatem nauczyciele i uczniowie powinni szukać zgubionego z matematyki punktu? Wszak nie od dzisiaj wiadomo, że na wynik ucznia na egzaminie pracują wszyscy nauczyciele w szkole: czytanie, rozumienie, interpretowanie tekstu czy ilustracji, liczenie, zauważanie różnic i podobieństw ćwiczy się zaczynając od przedszkola.

**Czy ucząc się chemii, nabywamy wprawy w posługiwaniu się podstawowymi umiejętnościami matematycznymi?**

Matematyka jako „Królowa nauk" jest również nieodłączną częścią chemii. Większość zadań opiera się na wykorzystaniu umiejętności matematycznych ucznia. Można by tu mnożyć przykłady jej obecności na lekcjach tego przedmiotu, zaczynając już na etapie początkowym, czyli w siódmej klasie szkoły podstawowej. Każdy chemik ćwiczy:

- umiejętność przekształcania wzorów, np. na gęstość, stężenia procentowe, molowe
- zamianę jednostek: długości, gęstości, objętości dla wszystkich stanów skupienia materii
- sprawność rachunkową, np. podczas obliczenia mas cząsteczkowych substancji oraz przy okazji kolejność wykonywanych działań
- porównania ilorazowe przy obliczaniu stosunków masowych, procentowych, molowych pierwiastków chemicznych w danych związkach chemicznych
- zapisywanie proporcji, np. w obliczeniu stężeń procentowych roztworów, rozpuszczalności substancji czy obliczeniach stechiometrycznych
- odczytywanie i interpretowanie danych przedstawionych na wykresach, np. krzywe rozpuszczalności pokazują zależności rozpuszczalności substancji stałych, gazów w wodzie od temperatury
- odczytywanie i zapisywanie równań, np. w interpretacji molowej, masowej, objętościowej równań reakcji chemicznych, a także dobierając współczynniki stechiometryczne (liczby) podczas pisania równań reakcji chemicznych, które muszą być zbilansowane, czyli liczba atomów każdego pierwiastka chemicznego powinna być taka sama zarówno w produktach, jak i substratach (po lewej i prawej stronie równania)
- wyobraźnię przestrzenną w geometrii cząsteczek - hybrydyzacji orbitali atomowych.

Tak moglibyśmy wymieniać dalej przykłady umiejętności matematycznych, które również kształcimy na lekcjach chemii, przy okazji dokładając cegiełkę w przygotowaniu ucznia do egzaminu z matematyki.

**Czy fizyka to nauka ścisła, czy przyrodnicza?**

Fizyka jest nauką przyrodniczą opartą na eksperymentalnym poznawaniu uniwersalnych praw opisujących świat materialny. Jej zadaniem w szkole jest dostarczanie uczniom narzędzi do badania przyrody, doprowadzenie do zrozumienia reguł nią rządzących oraz umożliwienie wykorzystania zdobytej wiedzy

i umiejętności w różnych aspektach życia codziennego. Do zapisywania danych z doświadczeń, weryfikowania ich wyników oraz opisywania praw fizycznych, uczniowi niezbędne są umiejętności zdobyte na lekcjach matematyki. Podczas koniecznego na fizyce przeliczania wielokrotności i podwielokrotności jednostek, np. czasu (sekundy, minuty, godziny), długości, prędkości czy objętości, uczniowie doskonalą podstawowe umiejętności rachunkowe, bardzo przydatne w życiu codziennym. Ale po co? Planując na przykład wycieczkę, chcielibyśmy wiedzieć, ile czasu zajmie nam podróż lub z jaką średnią prędkością przejechalibyśmy daną trasę.

**Przykład 1**

Z jaką średnią prędkością poruszał się rowerzysta, który przebył trasę wokół Zalewu Czorsztyńskiego trasą Velo Czorsztyn, jeśli pokonanie pętli o długości 38,5 km zajęło mu 180 minut.

**Rozwiązanie:**

Zamieniamy jednostki czasu: $t=180 \cdot \frac{1}{60}\ h = 3h$

Wykorzystujemy wzór: $V= \frac{s}{t}$

Podstawiamy dane do wzoru: $V_{śr}= \frac{38{,}5\,km}{3h} =12{,}8\ \frac{km}{h}$ .

Nie zapominamy również, że aby dokonywać obliczeń w fizyce, posługujemy się wzorami, czyli równaniami i ich przekształcaniem. Rozwiązywanie różnego rodzaju zadań z każdego działu wiąże się z umiejętnością rozwiązywania równań z jedną niewiadomą. To również rutyna, z którą uczniowie zapoznają się na matematyce. Ilustrują ją poniższe przykłady.

**Przykład 2**

O której godzinie musimy wyjechać z domu w Bydgoszczy, aby zdążyć na koncert na Stadionie Narodowym w Warszawie, który zaczyna się o godzinie 19:00. Trasa z Bydgoszczy do Warszawy ma długość 300 km. Przyjmijmy, że średnia prędkość samochodu na tej trasie to $100\ \frac{km}{h}$.

Szukane: t

Wykorzystujemy wzór: $V= \frac{s}{t}$

**Rozwiązanie:**

Ze wzoru: $V= \frac{s}{t}$ wyznaczamy czas: $t = \frac{s}{v}$

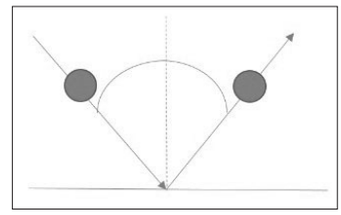
Podstawiamy dane do wzoru: $t = \frac{300\ km}{100\ \frac{km}{h}} = 3h$

Jeśli mamy być w Warszawie ok godziny 19:00, to należy wyjechać z domu 3 godziny wcześniej, więc o godzinie 16:00.

**Przykład 3**

Kto z nas nie jest ciekawy, w jakiej odległości od nas jest burza? Widzimy błysk, odliczamy sekundy do momentu usłyszenia grzmotu, mnożymy czas przez 3, potem wynik dzielimy przez 10 i mamy odległość w km. Dlaczego? Przyjmujemy, że wartość prędkości dźwięku w powietrzu wynosi $300\ \frac{m}{s}$, czyli $0{,}3\ \frac{km}{s}$ (znowu zamiana jednostek!). Ze wzoru: $V= \frac{s}{t}$ wyznaczamy drogę: $s = v \cdot t$ (znowu przekształcenie równania!). Co więcej, po kilku takich obliczeniach wiemy nawet, czy burza zbliża się do nas, czy oddala?

W edukacji fizycznej wykorzystujemy również własności geometryczne. Wyznaczając gęstość substancji, obliczamy objętość brył, a interpretując fizycznie grę w bilard, stosujemy w praktyce prawo odbicia, matematycznie - równości kątów, co ilustruje rysunek obok.



Fizyka i matematyka są ściśle ze sobą związane. O ile możemy przybliżyć uczniom zasady działania otaczającego nas świata, zainteresować ich osiągnięciami ludzkiego umysłu, to do dokładnego opisu i zapisu praw potrzebna jest matematyka: równania, proporcje oraz sprawnie wykonywane działania na liczbach: potęgowanie, mnożenie, dzielenie.

**Jakie umiejętności matematyczne są niezbędne w nauczaniu geografii i jak ucząc geografii, możemy wspierać rozwój kompetencji matematycznych uczniów?**

Geografia jako nauka opisująca Ziemię i procesy na niej zachodzące wykorzystuje wiele wskaźników obliczeniowych oraz graficznych form przekazu informacji w postaci tabel, wykresów i map. Mapy przedstawiają treści za pomocą różnych metod: kartogramu, kartodiagramu, izolinii czy sygnatur. Do rozumienia wszystkich tych sposobów niezbędne są umiejętności matematyczne.

Ale zacznijmy od tego, co najprostsze i pojawia się najwcześniej, czyli lekcjach przyrody, które zawierają treści geograficzne. Odczytywanie temperatury z termometru cieczowego wydaje się banalne, jeśli uczeń wie, kiedy temperatura jest dodatnia, powyżej zera na termometrze lub ujemna, gdy jest poniżej zera. Z drugiej strony łatwiej wytłumaczyć uczniowi dodawanie i odejmowanie liczb całkowitych przy wykorzystaniu pomocy praktycznej - termometru. Korzystając z innego przyrządu meteorologicznego, uczeń odczytuje wartość opadów atmosferycznych i oblicza sumy opadów dobowych, miesięcznych lub rocznych.

W starszych klasach, mając podane tabelarycznie wartości średnich miesięcznych temperatur powietrza i miesięcznych sum opadów, uczniowie na lekcji obliczają średnią roczną temperaturę powietrza dla danego miejsca oraz roczną sumę opadów atmosferycznych. Kolejnym rachunkiem jest obliczanie np. rocznej amplitudy temperatur, gdzie od najwyższej temperatury należy odjąć najniższą (pamiętając, że

tak jak na matematyce, odejmowanie liczby ujemnej, to w praktyce dodawanie!).

Podczas lekcji geografii uczniowie, poczynając od klasy czwartej aż do ósmej, doskonalą przeliczanie jednostek długości przy określaniu odległości z wykorzystaniem skali oraz przy przekształcaniu skali liczbowej na mianowaną i podziałkę liniową. Umiejętność mnożenia i dzielenia wykorzystują przy obliczaniu różnicy czasu miejscowego. Przy wspomnianych zagadnieniach utrwalają też podział godziny na sześćdziesiąt minut, a minuty na sześćdziesiąt sekund. Układ sześćdziesiętny ćwiczą również przy określaniu współrzędnych geograficznych, gdzie długość i szerokość geograficzną podajemy w stopniach kątowych. Pamiętając, że jeden stopień kątowy dzieli się na sześćdziesiąt minut kątowych (1° = 60'), a nie na sto, a jedna minuta kątowa to równowartość sześćdziesięciu sekund kątowych (1'= 60").

Na geografii wykorzystujemy również wszelkiego rodzaju wskaźniki demograficzne, do obliczenia których niezbędne są umiejętności matematyczne. Do najważniejszych z nich należą: gęstość zaludnienia, czyli liczba osób przypadająca na jednostkę powierzchni, wskaźnik urbanizacji, czyli procent osób zamieszkujących tereny miejskie na danym obszarze (np. w kraju lub województwie), stopień feminizacji społeczeństwa, czyli liczba kobiet przypadających na stu mężczyzn i wiele innych. Na lekcjach korzystamy również ze wskaźników obliczonych bardziej skomplikowanymi metodami matematycznymi, np. GUS (Główny Urząd Statystyczny) w celu analizowania danych i wyciągania wniosków czy ćwiczymy wskaźnik HDI, który umożliwia porównanie poziomu życia ludzi na świecie (poziom rozwoju społeczno-gospodarczego państw).

Na wielu lekcjach umiejętności matematyczne są niezbędne do przedstawienia lub zrozumienia zagadnień geograficznych. Geometria i kąty są potrzebne przy wyjaśnianiu zjawisk związanych z ruchami Ziemi. Od kąta padania promieni słonecznych na Ziemię zależy ilość docierającego do powierzchni Ziemi ciepła, co przekłada się na występujące strefy klimatyczne i typową dla nich roślinność. Warunki termiczne zmieniające się w naszej strefie klimatycznej mają wpływ na występujące tu pory roku. A te na wegetację i zmianę krajobrazu w naszym otoczeniu, np. w lesie. W tym samym lesie możemy wyznaczyć kierunki świata za pomocą kompasu, wykorzystując znajomość miary kątowej oraz azymut, czyli kąt mierzony od kierunku północnego w prawo, zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Wyznaczyć azymut możemy też w klasie, dysponując tylko kątomierzem, gdzie znów ćwiczymy umiejętności matematyczne.

Tak więc matematyka otacza nas również na geografii i korzystamy z jej dobrodziejstw na każdym kroku w czasie naszej lekcji, ale i w czasie zajęć terenowych, wycieczki szkolnej czy w codziennym życiu. I mimo, że uczymy różnych przedmiotów, to odpowiedzialność za kształtowanie umiejętności matematycznych spoczywa na każdym z nas.

Wszyscy mamy wpływ na to, jak będą wyglądać wyniki z egzaminów z matematyki w tym roku. Korzyści z treningu umiejętności matematycznych na przedmiotach ogólnokształcących są wielostronne, a poprawa wyników z matematyki przekłada się na osiągnięcia uczniów z przedmiotów przyrodniczych oraz na zwykłą życiową zaradność.

Mamy nadzieję, że Czytelnicy już mają pomysł, gdzie i kiedy znaleźć w swojej szkole ten jeden punkt z matematyki, którego brakuje. Życzymy, znalezienia ich o wiele więcej.

***Netografia:***

https://cke.gov.pl/egzamin-osmoklasisty/arkusze/
https://cke.gov.pl/egzamin-osmoklasisty/wyniki/sprawozdanie-z-egzaminu-osmoklasisty-w-2024-r/
https://www.oke.gda.pl/plikiOKE/Opracowania_wynikow/2024/E8/2024_09_19_E8_matematyka_sprawozdanie_pom.pdf
https://cke.gov.pl/egzamin-osmoklasisty/wyniki/sprawozdanie-z-egzaminu-osmoklasisty-w-2023-r/
https://cke.gov.pl/egzamin-maturalny/egzamin-maturalny-w-formule-2023/arkusze/
https://cke.gov.pl/egzamin-maturalny/egzamin-maturalny-w-formule-2023/wyniki-sprawozdania/sprawozdanie-z-egzaminu-maturalnego-w-2024-r/
https://www.oke.gda.pl/plikiOKE/Opracowania_wynikow/2024/Matura/2024_09_19_EM_matematyka_sprawozdanie_kuj_pom_F23.pdf
http://smj.jaroslaw.pl/aktualnosci/231-pika-a-geometria