

Na egzaminach z matematyki w 2021 roku... łatwo nie było

Zadania w tegorocznym egzamin ósmoklasisty z matematyki nie były łatwe ani przewidywalne dla większości uczniów klas ósmych. Średni wynik w kraju wynosił 47%, podczas, gdy wynik w naszym województwie był niższy o 4 punkty procentowe. Arkusz zawierał 19 zadań, w tym 9 wielokrotnego wyboru z jedną poprawną odpowiedzią, jedno typu prawda - fałsz, 4 podwójnego wyboru A/B, C/D, jedno na dobieranie A/B z uzasadnieniem spośród 1-3 oraz 4 zadania otwarte – 2 za 2 i 3 za 3 punkty. Ósmoklasiści rozwiązywali zadania z obszaru 22 działów zawartych w wymaganiach egzaminacyjnych, za które mogli zdobyć maksymalnie 25 punktów w czasie 100 minut. Zestaw nie zawierał zadań bardzo trudnych, ani bardzo łatwych. Zdający musieli wykazać się nie tylko sprawnością rachunkową, ale również umiejętnością wykorzystania i tworzenia informacji, wykorzystania i interpretowania reprezentacji oraz rozumowania i argumentacji. Często mieli problem ze zrozumieniem treści zadań oraz poprawnym zapisywaniem rozwiązań w postaci wyrażeń arytmetycznych lub algebraicznych, popełniali liczne błędy rachunkowe, nie pamiętali podstawowych własności figur geometrycznych.

Łatwe dla piszących egzamin w kujawsko-pomorskim były: zadanie 10 (łatwość $p = 0,74$) wykorzystujące średnią arytmetyczną w obliczeniach praktycznych oraz zadanie 11 polegające na jednokrotnym losowaniu oraz obliczeniu prawdopodobieństwa wybrania losu wygrywającego na loterii ($p = 0,72$). Umiarkowanie trudne okazało się najłatwiejsze spośród pytań otwartych zadanie 16 z obszaru *Rozumowania i argumentacji* ($p = 0,6$). Uzasadniając, że nie można dokonać wskazanego w poleceniu sposobu podziału czekolady między trójką rodzeństwa ósmoklasiści wykazali się wyjątkową kreatywnością. Zapisywali wyrażenie algebraiczne lub arytmetyczne, porównywali ułamki, wykonywali rysunki, na których zaznaczali podział czekolady w określony sposób.

Najtrudniejsze w zestawie było zadanie 19 ($p = 0,24$). Aby obliczyć długość odcinka poprowadzonego z wierzchołka prostokąta prostopadłe do

przekątnej należało wykorzystać twierdzenie Pitagorasa, a następnie porównać wyrażenia opisujące pole trójkąta. Zdającym bardzo trudno było uzyskać maksymalną liczbę punktów, bo pomimo niezbyt skomplikowanych obliczeń popełniali błędy rachunkowe, a często nie umieli wybrać poprawnej strategii. Aby rozwiązać zadanie 13 ($p = 0,25$) uczniowie musieli ustalić, w ilu w punktach będących wspólnymi wielokrotnościami liczb 2 i 5 należy dokonać przecięcia pięćdziesięciocentymetrowej listewki. Niestety często omyłkowo spośród dodatnich liczb naturalnych wybierali liczby mniejsze lub równe 50, zamiast tylko mniejsze od 50. Dużym problemem dla ósmoklasistów było dobranie modelu matematycznego w rozwiązaniu zadania 18 ($p = 0,25$). Dotyczyło ono kwestii wyznaczenia ceny puszek karmy dla psów przy podanych warunkach. Można było je rozwiązać układając równanie, ustalając koszt zakupu 4 puszek karmy albo wykorzystując metodę prób i błędów. Najczęstszym powodem niepoprawnych rozwiązań była mylna interpretacja treści zadania, pojawiały się również pomyłki podczas rozwiązywania równania oraz błędy rachunkowe. Trudne okazały się również zadanie 15 ($p = 0,32$), w którym należało wyznaczyć pole powierzchni bryły zbudowanej z dwóch ostrosłupów oraz osadzone w kontekście praktycznym zadanie 6 ($p = 0,32$). Rozwiązanie tego ostatniego wymagało umiejętności interpretacji informacji zapisanych w tabeli, powiązania ich z informacjami podanymi w treści zadania i zapisania wyrażenia arytmetycznego opisującego poprawny sposób obliczenia podatku od dochodów w dwóch przypadkach. Analizując zadania trudne, dobrze też wspomnieć o zadaniu 17 ($p = 0,34$), które wymagało połączenia wiedzy z geometrii - twierdzenia Pitagorasa oraz zależności między prędkością, drogą a czasem. Wielu zdających nie umiało rozpocząć zadania, chociaż bardzo podobne zadanie pojawiło się w arkuszu próbnym CKE z marca 2021 roku.

Arkusz maturalny z matematyki na poziomie podstawowym został skonstruowany zgodnie z wytycznymi zawartymi w wymaganiach egzaminacyj-

nych na rok 2021. Składał się z 35 zadań sprawdzających wymagania szczegółowe z obszaru wszystkich 10 działów obowiązujących na maturze, w tym 28 wielokrotnego wyboru z jedną poprawną odpowiedzią, sześciu zadań otwartych krótkiej odpowiedzi i jednego zadania otwartego rozszerzonej odpowiedzi ocenianego w skali 0-5pkt. W czasie 170 minut abiturienti mogli zdobyć maksymalnie 45 punktów. Musieli się wykazać nie tylko znajomością pojęć i twierdzeń, ale także umiejętnością ich zastosowania, zbudowania strategii, modelowania matematycznego, rozumowania i argumentacji oraz analizowania i interpretowania problemów matematycznych. Egzamin okazał się średnio trudny dla większości maturzystów. Zdający w naszym województwie uzyskali średnio 53% punktów możliwych do zdobycia, tj. o trzy punkty procentowe mniej niż średni wynik w kraju. Niestety aż 24% przystępujących do egzaminu w maju nie uzyskało progu zaliczenia. Zdający dobrze poradzili sobie z zadaniami sprawdzającymi mało skomplikowane umiejętności, które wymagały wykonania jednej lub dwóch czynności. Najłatwiejsze okazały się zadania zamknięte dotyczące wykonywania obliczeń procentowych ($p = 0,93$), stosowania wzoru na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego ($p = 0,78$), zastosowania twierdzenia Pitagorasa ($p = 0,73$), korzystania z własności kątów w równoległobokach ($p = 0,61$) czy wyznaczania mediany zestawu danych ($p = 0,66$). Stosunkowo łatwe okazały się obecne w każdym arkuszu zadania otwarte polegające obliczeniu prawdopodobieństwa zdarzenia przy dwukrotnym rzucie kostką ($p = 0,61$) czy rozwiązaniu nierówności kwadratowej ($p = 0,66$). Niestety, część piszących nadal ma problem z poprawną interpretacją graficzną i zapisaniem rozwiązania nierówności za pomocą przedziałów.

Najtrudniejsze, jak każdego roku, było zadanie z obszaru *Rozumowania i argumentacji*. Abiturienti mieli kłopoty z uzasadnieniem tezy w dowodzie wymagającym przekształcenia wyrażeń algebraicznych ($p = 0,21$). Zdarzało się, że przyjmowali błędne założenia, sprawdzali prawdziwość tezy dla wybranych liczb, a często nawet nie podejmowali próby rozwiązania zadania. Niemało problemów sprawiły maturzystom również zadania zamknięte dotyczące treści geometrycznych: 21 - polegające na zastosowaniu, pojawiających się co roku, własności między kątem wpisanym i środkowym ($p = 0,41$), 25 - wymagające obliczenia pola kwadratu o danym wierzchołku i środku umieszczonego na płaszczyźnie kartezjańskiej ($p = 0,37$) oraz 26 - sprawdzające umiejętność obliczenia prawdopodobieństwa wylosowania spośród dwóch wierzchołków prostopadłościanu takich, które są końcami przekątnej ($p = 0,32$). Nie najlepiej wypadło też zadanie 31 polegające na wyznaczeniu wzoru

funkcji liniowej na podstawie informacji o jej wzorze ($p = 0,29$). Podczas rozwiązywania przystępujący do egzaminu albo wykazywali się brakiem znajomości pojęcia funkcji liniowej, albo mylili argument z wartością funkcji, albo nie umieli połączyć informacji zawartych w treści zadania tak, aby skonstruować poprawny model matematyczny umożliwiający rozwiązanie zadania. Problematyczne dla piszących okazało się również zadanie 35 z geometrii analitycznej, które wymagało użycia i zbudowania strategii ($p = 0,24$). Maturzyści, aby wyznaczyć współrzędne wierzchołka trójkąta i obliczyć jego obwód, powinni wykorzystać i połączyć w logiczną całość szereg umiejętności, np. wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez punkty A i B, ustalić równanie prostej, która jest do niej prostopadła i przechodzi przez dany punkt, obliczyć współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych oraz odległość dwóch punktów. Popelniali przy tym wiele błędów – zaczynając od braku umiejętności czytania treści zadania ze zrozumieniem, poprzez niepoprawną interpretację jego treści, mylne oznaczanie położenia punktu w układzie współrzędnych aż po pomyłki rachunkowe.

Arkusz egzaminacyjny na poziomie rozszerzonym, podobnie jak w poprzednich latach, składał się z 15 zadań: 4 zamkniętych wyboru wielokrotnego z jedną poprawną odpowiedzią, 1 zadania kodowanego oraz 6 zadań krótkiej i 4 zadań rozszerzonej odpowiedzi. Łącznie maturzyści mogli zdobyć 50 punktów w czasie 180 minut. Różnicę pomiędzy arkuszem w 2021 roku a standardowym arkuszem rozszerzonym w formule 2015 stanowiły, dostosowane do okrojonych wymagań egzaminacyjnych, treści 11 działów podstawy programowej. Przeciętny maturzysta w zakresie rozszerzonym uzyskiwał w kraju wynik 31%, natomiast w naszym województwie 28 %.

Test nie zawierał zadań bardzo łatwych ani łatwych. Najmniej problematyczne okazało się zadanie kodowane sprawdzające umiejętność wyznaczania granic ciągów, z wykorzystaniem własności ciągów typu $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$ oraz z twierdzeń o działaniach na granicach ($p = 0,62$). Prawie 50 % zdających rozwiązało poprawnie zadanie 10 ($p = 0,48$), w którym należało wykazać się umiejętnością wyznaczenia równania prostej przechodzącej przez dwa dane punkty, obliczenia odległości punktu od prostej, a następnie wyznaczenia współrzędnych punktu styczności okręgu i prostej. Podobny poziom wykonania ($p = 0,47$) abiturienti osiągnęli w zadaniu 1, stosując wzór na cosinus podwojonego argumentu oraz zadaniu 6, w którym należało wykazać prawdziwość równości w oparciu o własności logarytmów.

Najtrudniejsze w poziomie rozszerzonym, podobnie jak w poprzednim roku, okazało się zadanie 8 wy-

magające przeprowadzenia dowodu geometrycznego ($p = 0,13$) z zastosowaniem cech przystawania, podobieństwa trójkątów oraz twierdzenia cosinusów. Zdający podczas układania zależności popełniali liczne błędy merytoryczne, rachunkowe, a przede wszystkim po kilku przekształceniach porzucali rozwiązanie zadania, nie mając pomysłu, jak je dokończyć.

Bardzo trudne dla większości przystępujących do egzaminu okazało się także rozwiązanie klasycznego równania trygonometrycznego ($p = 0,14$). Zadanie wymagało zbudowania strategii rozwiązania, która opierała się na zastosowaniu wzoru na cosinus podwójonego kąta albo różnicę cosinusów, zapisanie równania w postaci iloczynowej, następnie zapisanie alternatywy odpowiednich równań i wyznaczenie rozwiązań każdego z nich w przedziale domkniętym $\langle 0, \pi \rangle$. Najczęściej popełnianym błędem było dzielenie obu stron równania przez wyrażenie: $\cos x - \sin x$, a co za tym idzie pomijanie rozwiązania równania $\cos x = \sin x$.

Wiele problemów sprawiały maturzystom zadania z obszaru *Modelowanie matematyczne*. W podpunkcie pierwszym zadania 14 z geometrii analitycznej ($p = 0,16$) należało wyznaczyć wzór funkcji opisującej pole trójkąta, mając dane dwa jego wierzchołki i wiedząc, że trzeci należy do paraboli $y = x^2$, w drugim tak dobrać współrzędne punktu C, by badany trójkąt był ostrokątny. Niestety maturzyści często nie podejmowali próby rozwiązania zadania albo porzucali rozwiązywanie po wykonaniu pierwszej części.

Nie najlepiej wypadło również ostatnie w arkuszu zadanie dotyczące zastosowania rachunku różniczkowego do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych ($p = 0,25$). Choć pojawia się w każdym arkuszu od roku 2015, to stanowi problem ze względu na różnorodność zagadnień. Zdający często nie odczytywali poprawnie treści zadania i budowali błędnie model funkcji kosztu wyprodukowania pudełka zakładając, że ma ono inną niż podana w treści polecenia liczbę ścian. Wśród rozwiązań dominowały takie, w których zdający podawali błędną dziedzinę funkcji oraz rozwiązania bez poprawnego uzasadnienia istnienia wartości najmniejszej badanej funkcji.

Sytuacja pandemiczna wymusiła zmianę systemu pracy i chociaż wymagania egzaminacyjne zostały okrojone, to jednak uczniowie musieli opanować dużą część materiału w trudnych dydaktycznie warunkach. Nauka w szkole, w gronie rówieśników daje lepsze efekty niż nauka w domu przed komputerem, gdzie na koncentrację ucznia ma wpływ wiele czynników, zaczynając od problemów technicznych, a kończąc na kuszącej opcji zagrania w grę komputerową. Młodszy ani starszy nastolatek nie powinien być tylko biernym słuchaczem. Powinien eksperymentować

z matematyką, ćwiczyć skomplikowane umiejętności, uczyć się na błędach, dyskutować rozwiązania w grupie rówieśników. Łatwiej bowiem zrozumieć pewne treści w sali lekcyjnej, gdzie nauczyciel, widząc problem, naprowadza na rozwiązanie, koryguje usterki, a bryły można dotknąć i obrócić, a nie tylko narysować. Na każdym poziomie edukacyjnym należy wzmacniać poczucie odpowiedzialności uczniów za uzyskiwane wyniki. Zwracać uwagę na poprawność rachunkową, pokazywać różne sposoby na rozwiązanie tego samego problemu, uczyć sprawdzania rozwiązania z wszystkimi warunkami zadania. Warto zachęcać uczniów do uważnego czytania i analizowania treści poleceń oraz poprawnego zapisywania wyrażen opisujących treść zadań. Rozwiązywać zadania, które wymagają przeprowadzenia rozumowania i przytoczenia argumentacji. Wdrażać do rozwiązywania zadań wieloetapowych wymagających zbudowania strategii oraz takich, które łączą wiadomości z kilku działów. Działania ukierunkowane na przygotowanie do egzaminów opierać na wymaganiach zawartych w aneksach do informatorów oraz wykorzystaniu zadań z poprzednich arkuszy CKE.

Ósmoklasistom, Maturzystom i Nauczycielom życzę powodzenia w matematycznych zmaganiach! Oby na egzaminach z matematyki w 2022 roku... łatwo było

Bibliografia/netografia:

- https://cke.gov.pl/images/_EGZAMIN_MATURALNY_OD_2015/Informacje_o_wynikach/2021/sprawozdanie/EM_matematyka_sprawozdanie_2021.pdf
- https://www.oke.gda.pl/plikiOKE/Opracowania_wynikow/2021/Matura/2021_09_17_EM_KUJ_POM_matematyka.pdf
- https://cke.gov.pl/images/_EGZAMIN_MATURALNY_OD_2015/Arkusze_egzaminacyjne/2021/Matematyka/poziom_podstawowy/EMAP-P0-100-2105.pdf
- https://cke.gov.pl/images/_EGZAMIN_MATURALNY_OD_2015/Arkusze_egzaminacyjne/2021/Zasady_Oceniania/EMAP-P0-100-2105-zasady.pdf
- E. Ludwikowska, Analiza wyników egzaminu maturalnego Z MATEMATYKI w 2021 roku w województwie kujawsko-pomorskim, konferencja z 27.11.2021 roku, KPCEN Bydgoszcz
- Sprawozdanie z egzaminu ósmoklasisty w 2021 r.
- https://www.oke.gda.pl/plikiOKE/Opracowania_wynikow/2021/E8/ANEKS_SPRAWOZDANIE_E8_2021_KUJ-POM.pdf
- https://cke.gov.pl/images/_EGZAMIN_OSMOKLASISTY/Arkusze_egzaminacyjne/2021/matematyka/OMAP-100-X-2105.pdf
- https://cke.gov.pl/images/_EGZAMIN_OSMOKLASISTY/Arkusze_egzaminacyjne/2021/zasady_oceniania/matematyka/OMAP-100-2105-zasady.pdf